

# فهرست

تست

درس نامه

۳۱	۸	درس ۱: گزاره	<b>فصل اول</b> <b>آشنایی با مبانی ریاضیات و استدلال</b>
۳۶	۱۵	درس ۲: مجموعه	
۳۹	۲۰	درس ۳: قوانین جبر مجموعه‌ها	
۴۴		آزمون:	
۴۵		سری Z:	
۶۷	۴۷	درس ۱: فضای نمونه‌ای و پیشامد	<b>فصل دوم</b> <b>احتمال</b>
۶۸	۵۰	درس ۲: احتمال هم‌شانس	
۷۴	۵۴	درس ۳: قوانین احتمال	
۷۶	۵۶	درس ۴: احتمال غیرهم‌شانس	
۷۷	۵۸	درس ۵: احتمال شرطی	
۸۰	۶۱	درس ۶: قانون احتمال کل	
۸۳	۶۴	درس ۷: پیشامدهای مستقل	
۸۶		آزمون:	
۸۷		سری Z:	
۱۰۹	۸۹	درس ۱: مقدمه‌ای بر علم آمار	<b>فصل سوم</b> <b>آمار توصیفی</b>
۱۱۶	۱۰۱	درس ۲: شاخص‌های پراکندگی	
۱۲۰		آزمون:	
۱۲۱		سری Z:	
۱۳۰	۱۲۳	درس ۱: روش‌های نمونه‌گیری	<b>فصل چهارم</b> <b>آمار استنباطی</b>
۱۳۱	۱۲۵	درس ۲: برآورد	
۱۳۴		آزمون:	
۱۳۵		سری Z:	
۱۳۷			
۱۹۸			<b>پاسخ‌نامه تشریحی</b> <b>پاسخ‌نامه کلیدی</b>

# درس دوم احتمال هم‌شانس



## احتمال مقدماتی

در فضای نمونه‌ای هم‌شانس (همه اعضای  $S$  شانس یکسان دارند)، احتمال (یعنی شانس) رخ دادن هر پیشامد، متناسب با تعداد اعضای آن است. یعنی هر چه پیشامد  $A$ ، تعداد عضو بیشتری داشته باشد، شانس بیشتری دارد، به بیان دقیق‌تر، احتمال پیشامد  $A$  از فضای نمونه‌ای  $S$  برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تذکره ۱ از این تعریف نتیجه می‌شود که:  $0 < P(\text{پیشامدهای دیگر}) < 1$   $P(S) = 1$   $P(\emptyset) = 0$

مدل‌های مختلفی از سؤال در این قسمت هست: سکه، تاس، عددسازی، کلمه‌سازی، انتخاب، چیدن، ساختن مثلث، گروه‌ها، گوی‌ها و ... در هر کدام از این مدل‌ها، برای محاسبه احتمال، باید بلد باشیم که  $n(S)$  و  $n(A)$  را به سرعت به دست بیاوریم، تیپ‌های مختلف را با هم ببینیم:

۱. پرتاب تاس • در پرتاب تاس دیدیم که فضای نمونه‌ای به صورت  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  در نتیجه  $n(S) = 6$  است، برای احتمال پیشامدی مانند  $A$ : «مضرب ۳ بیاید» تعداد اعضای  $A$  را به دست می‌آوریم:  $A = \{3, 6\}$  پس  $n(A) = 2$  و احتمال آن برابر است با:  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

آزمون ۱ در پرتاب یک تاس، احتمال کدام پیشامد با بقیه فرق دارد؟

- (۱) مضرب ۳ یا زوج بیاید. (۲) فرد یا اول بیاید.  
(۳) نه مضرب ۴ باشد و نه اول. (۴) مضرب ۳ نیاید.

پاسخ ۱ در پرتاب یک تاس  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  فضای نمونه‌ای است؛ پس  $n(S) = 6$ .

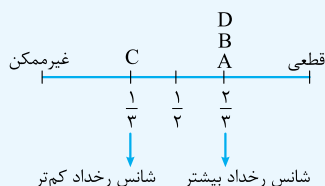
در (۱) می‌خواهیم مضرب ۳ یا زوج باشد. مضرب ۳ عبارت‌اند از ۳ و ۶ و اعداد زوج عبارت‌اند از ۲ و ۴ و ۶؛ پس اجتماع این‌ها می‌شود  $A = \{2, 3, 4, 6\}$  که پیشامدی ۴ عضوی است و احتمالش می‌شود  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6}$

در (۲) احتمال فردها یا اول‌ها را داریم؛ یعنی پیشامد  $B = \{1, 2, 3, 5\}$  که این هم ۴ عضوی است و احتمالش  $P(B) = \frac{4}{6}$  خواهد بود. پس می‌گوییم  $A$  و  $B$  هم‌شانس هستند.

در (۳) مضرب ۴ نباشد و اول نباشد؛ یعنی ۴ و هم‌چنین ۲ و ۳ و ۵ را نمی‌خواهیم، پس پیشامد مورد نظر  $C = \{1, 6\}$  است که احتمالش  $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6}$  می‌شود.

در (۴) باید مضرب ۳ نیاید؛ یعنی  $D' = \{3, 6\}$ ؛ پس  $D = \{1, 2, 4, 5\}$  که احتمال این هم  $\frac{4}{6}$  خواهد شد؛ پس (۳) با بقیه متفاوت بود.

تذکره ۲ کتاب درسی در مقایسه احتمال پیشامدهای مختلف، (این محور را هم کشیده است):



	۱	۲	۳	۴	۵	۶	تاس اول ←
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	این یعنی تاس اول ۶ و تاس دوم ۲ است.
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	
تاس دوم ↑							در این شش خانه روی قطر دو تاس مساوی هم هستند.

## • دو تاس •

نمونه‌ای آن  $6^2 = 36$  عضو دارد که در جدول روبه‌رو آن‌ها را می‌آوریم:  
 در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت به وجود می‌آید که در ۶ حالت (روی قطر) اعداد دو تاس با هم برابرند، در ۱۵ خانه بالاتر از قطر، عدد تاس اول بیشتر است و در ۱۵ خانه پایین‌تر از قطر، عدد تاس دوم بیشتر است.

در هر خانه جدول، مجموع دو تاس را نوشته‌ایم؛ همان‌طور که می‌بینید مثلاً در ۳ تا خانه از ۳۶ خانه، مجموع برابر ۴ است، پس احتمال این که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد برابر است با  $\frac{3}{36}$ .

**تذکره** در پرتاب دو تاس همیشه حالت (۱، ۵) با حالت (۵، ۱) فرق دارد و برای این که اشتباه نکنید همواره فرض کنید که دو تاس متمایز هستند. یعنی همیشه بگویید: تاس اول، تاس دوم و ...

بعضی‌ها دوست دارند تعداد حالت‌های مجموع دو تاس را حفظ باشند، جدول زیر به ما کمک می‌کند که با یک الگوی خوب، حالت‌ها را حفظ کنیم:

	بیشترین احتمال										
جمع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

یک واحد یک واحد کم می‌شود ← یک واحد یک واحد زیاد می‌شود

مثلاً احتمال این که مجموع دو تاس ۱۱ باشد، برابر است با:  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

**آزمون** در پرتاب دو تاس، احتمال این که «اختلاف تاس‌ها ۲ یا مجموع دو تاس کم‌تر از ۵ باشد» کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{3}$       ۳)  $\frac{1}{2}$       ۴)  $\frac{7}{18}$

**پاسخ** پیشامد مطلوب از اجتماع دوتا پیشامد ساخته شده:

جمع کم‌تر از ۵ باشد  $B$  و اختلاف تاس‌ها ۲ باشد  $A$

جدول را ببینید:

$A$  دارای ۸ عضو و  $B$  شامل ۶ عضو است و ۲ تا عضو هم که مشترک است، پس ۱۲ تا از ۳۶ خانه جدول، مطلوب هستند، پس احتمال برابر است با:  $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

## • ۲. پرتاب سکه - جنسیت فرزندان یک خانواده •

وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، احتمال «رو» برابر احتمال «پشت» و هر کدام برابر  $\frac{1}{2}$  هستند، دقیقاً مثل این که وقتی بچه‌ای به دنیا می‌آید، احتمال دختر (یا پسر) بودنش،  $\frac{1}{2}$  است، پس آزمایش پرتاب سکه دقیقاً مثل جنسیت فرزندان یک خانواده است. با یک نکته راحت می‌توانیم تمام تست‌های این قسمت را مثل آب خوردن حل کنیم:

**نکته ۱** در یک خانواده با  $n$  فرزند، احتمال این که خانواده  $k$  فرزند پسر (یا دختر) داشته باشد، برابر است با:  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

**نکته ۲** در  $n$  بار پرتاب یک سکه (پرتاب  $n$  تا سکه)، احتمال این که  $k$  سکه «رو» بیاید برابر است با:  $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

مثلاً اگر ۵ سکه را با هم پرتاب کنیم، احتمال این که ۳ تا سکه رو بیاید برابر است با:  $\frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \frac{10}{32}$

**آزمون** در یک خانواده با ۶ فرزند، احتمال این که تعداد پسرها دو برابر تعداد دخترها باشد، کدام است؟

- ۱)  $\frac{15}{64}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴)  $\left(\frac{15}{64}\right)^2$

**پاسخ** باید تعداد پسرها ۴ تا و تعداد دخترها ۲ تا باشد! پس احتمال این را می‌خواهیم که ۴ تا پسر داشته باشیم:

$$P(۴ تا پسر) = P(۲ تا دختر) = \frac{\binom{6}{4}}{2^6} = \frac{15}{64}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

**یادآوری**

• **۳. کیسه و مهره‌های رنگی** • رسیدیم به معروف‌ترین و مهم‌ترین تست‌های احتمال! تست می‌گویید که یک کیسه داریم و درون آن  $n$  مهره سفید و  $m$  مهره سیاه وجود دارد، مثلاً ۳ مهره قرمز داریم و چه قدر احتمال دارد که ۲ تا سفید باشد؟ در این تست‌ها فضای نمونه‌ای برابر است با:

(تعداد انتخاب‌ها کل) و برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد مطلوب، از بین رنگ‌ها انتخاب می‌کنیم. در مثالی که زدیم باید ۲ تا از سفیدها و یکی از سیاه‌ها را انتخاب کنیم:

$$\frac{\binom{n}{2} \times \binom{m}{1}}{\binom{m+n}{3}}$$

**تذکره** دقت کنید که مجموع انتخاب‌ها در صورت و مجموع انتخاب‌ها در مخرج کسر، باید برابر ۳ باشند.

**تست ۱** در کیسه‌ای ۴ مهره سبز، ۳ مهره آبی و ۵ مهره قرمز داریم. اگر ۳ مهره با هم بیرون بیاوریم، شانس کدام اتفاق کم‌تر از بقیه است؟

(۱) سه رنگ متفاوت خارج شود.

(۲) مهره‌های خارج شده فقط از دو رنگ باشند.

(۳) در بین مهره‌های خارج شده، فقط یک آبی باشد.

(۴) در بین مهره‌ها، فقط دو قرمز باشد.

**پاسخ ۱**  $n(S)$  برای همه پیشامدها یکسان و برابر است با  $\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$ . پس برویم دنبال تعداد عضو پیشامدها:

در (۱) برای سه رنگ متفاوت داریم:

$$n(A) = \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

در (۲) برای این‌که مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند، باید دوتا از مهره‌ها هم‌رنگ و سومی متفاوت باشد؛ یعنی:

در (۳) فقط یک آبی و بنابراین دوتا از بین سبز و قرمز می‌خواهیم:

$$n(B) = \binom{3}{2} \times \binom{9}{1} + \binom{4}{2} \times \binom{8}{1} + \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 3 \times 9 + 6 \times 8 + 10 \times 7 = 27 + 48 + 70 = 145$$

در (۴) دو قرمز و یکی دیگر می‌خواهیم:

$$n(C) = \binom{3}{1} \times \binom{9}{2} = 3 \times 36 = 108$$

در (۱) دو قرمز و یکی دیگر می‌خواهیم:

$$n(D) = \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 70$$

پس شانس (۱) از همه کم‌تر است؛ چون تعداد اعضای پیشامدش از همه کم‌تر است.

گاهی اوقات به جای الفاظ کیسه و مهره، تست می‌گویید: چند نوع جاندار یا دانش‌آموزان تجربی و ریاضی و ... ولی داستان همان داستان است!

**تست ۱** از بین ۴ ببر و ۶ تا شیر و ۲ تا زرافه، ۲ تا را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی حیوانات انتخاب شده از یک نوع نیستند؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

**پاسخ ۱** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:  $n(S) = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$ ،  $n(A)$  را با اصل جمع باید به دست بیاوریم:

$$n(A) = \binom{4}{1} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{1} \times \binom{2}{1} = 24 + 8 + 12 = 44$$

پس احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$$

• **۴. کیسه و مهره‌های شماره‌دار** • در بعضی از تست‌ها مهره‌های درون کیسه، شماره‌دار هستند و باید تعدادی از آن مهره‌ها را خارج کنیم و

احتمال اتفاق خاص را بررسی کنیم، در این سؤال‌ها دقت کنید که

(۱)  $n(S)$  باز هم برابر (تعداد انتخاب‌ها کل) است.

(۲) ترتیب شماره‌های خارج شده اهمیت ندارد یعنی در این مسائل برخلاف پرتاب دو تاس (۱, ۲) و (۲, ۱) با هم فرقی ندارند.

(۳) وقتی که شماره‌های ۱ تا  $n$  را در کیسه داریم و ۲ تا مهره خارج می‌کنیم، امکان ندارد که مثلاً ۲ و ۲ خارج شده باشند (پون په‌رونه «۲» داریم!).

**تست ۱** از میان ۶ گوی با شماره‌های ۱ تا ۶، سه گوی با هم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های خارج شده زوج است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

ابتدا  $n(S)$  را به دست می‌آوریم: **پاسخ ۲** |  $n(S) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$

مجموع سه عدد وقتی زوج می‌شود که یا «هر سه عدد زوج باشند» و یا «دوتا از اعداد فرد و دیگری زوج باشد»، پس:

در اعداد ۱ تا ۶، ۳ تا عدد فرد داریم، ۳ تا عدد زوج داریم:  $\{۲, ۴, ۶\}$

$$n(A) = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 1 + 3 \times 3 = 10$$

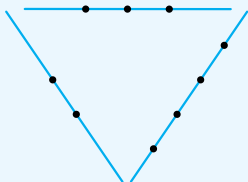
انتخاب انتخاب انتخاب  
۱ زوج ۲ تا فرد ۳ تا زوج

پس احتمال می‌شود:  $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

**احتمال به کمک آنالیز ترکیبی** • در خیلی از تست‌ها، برای محاسبه  $n(S)$  و  $n(A)$  برمی‌گردیم به فصل آنالیز ترکیبی و از مطالبی که آن‌جا یاد گرفتیم، استفاده می‌کنیم، خوب! طبیعتاً تنوع این تست‌ها خیلی زیاد است! در جدول زیر نمونه‌های اصلی را مرور می‌کنیم:

بیان آزمایش	$n(S)$	خواسته سؤال	شمارش پیشامد A و رسیدن به $n(A)$	$P(A)$
۵ نفر کنار هم در صف می‌ایستند.	$5! = 120$	علی نفر اول باشد و رضا آخر نباشد.	$n(A) = 3 \times 6 = 18$ به جز علی و رضا $3!$ فقط علی $1$	$\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$
با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز می‌سازیم.	$5 \times 4 \times 3 = 60$	کم‌تر از ۳۰۰ باشد.	$\frac{2}{2} \times 4 \times 3 = 24$ ۲ یا ۱	$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$
با حروف کلمه SPACET کلمه‌های ۳ حرفی می‌سازیم.	$6 \times 5 \times 4 = 120$	در کلمه جدید، P و S کنار هم باشند.	$4 \times 2! \times 2 = 16$ صف دوتایی بسته S و P حرف دیگر	$\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

**تست ۱** | از نقاط شکل، ۳ تا را انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال مثلث با رئوس نقاط انتخابی وجود دارد؟



$\frac{20}{21}$  (۲)

$\frac{27}{28}$  (۱)

$\frac{13}{14}$  (۴)

$\frac{79}{84}$  (۳)

**پاسخ ۲** | برای انتخاب ۳ تا از نقاط به تعداد  $n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$

استفاده از متمم می‌گوییم:  $n(A) = n(S) - n(A') = \binom{9}{3} - \left( \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{2}{3} \right) = 84 - (1 + 4 + 0) = 79$

سه نقطه روی یک خط

دقت کردید؟ یا هر سه نقطه روی خط بالایی‌اند یا هر سه روی خط سمت راست یا هر سه روی خط سمت چپ (که امکان ندارد چون فقط دوتا نقطه روی این خط است). پس احتمال می‌شود:

$P(A) = \frac{79}{84}$

**تذکره ۱** جایگشت‌های خاص، یکی در میان‌ها، بسته‌بندی اشیاء و ... در تست‌های احتمال خیلی محبوب هستند.

**تست ۱** | ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ را کنار هم می‌چینیم، چه قدر احتمال دارد که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار بگیرند؟

$\frac{1}{35}$  (۴)

$\frac{1}{70}$  (۳)

$\frac{2}{35}$  (۲)

$\frac{3}{70}$  (۱)

**پاسخ ۱** | از چینش اعداد ۱ تا ۷ به تعداد ۷! صف ایجاد می‌شود. پس  $n(S) = 7!$

برای یکی در میان شدن باید فرم کلی این‌جوری باشد: فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد، پس حتماً صف با یک عدد فرد شروع شود! پس جایگاه اعداد فرد مشخص است و ۴! جایگشت دارند و جایگاه اعداد زوج نیز مشخص است و ۳! جایگشت دارند، پس:  $n(A) = 3! \times 4!$ ، حالا احتمال را حساب می‌کنیم:

$P(A) = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{3!}{5 \times 6 \times 7} = \frac{1}{35}$

**حرف آخر** • همیشه قرار نیست شمارش تعداد اعضای  $n(A)$  با استفاده از اصل ضرب و جمع و ترکیب و این‌ها باشد. بعضی اوقات، به‌خصوص در

مسائل عددها و برای بررسی بخش‌پذیری یا اول بودن، تنها راه، نوشتن اعضای S و پیدا کردن اعضای A است.

تست زیر را ببینید:

**تست ۱** با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۵ عددی دورقمی می‌سازیم (تکرار ارقام مجاز است). با کدام احتمال اول است؟

$\frac{1}{4}$  (۴)

$\frac{1}{8}$  (۳)

$\frac{3}{16}$  (۲)

$\frac{1}{16}$  (۱)

**پاسخ ۲** اعداد دورقمی با این ارقام عبارت‌اند از:

$n(S) = 4 \times 4 = 16$

$S = \{11, 12, 14, 15, 21, 22, 24, 25, 41, 42, 44, 45, 51, 52, 54, 55\}$

که در بین آن‌ها فقط ۱۱ و ۴۱ اول‌اند. پس  $n(A) = 2$  و احتمال می‌شود  $\frac{2}{16}$  یا  $\frac{1}{8}$ .