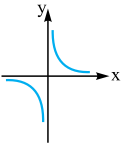
فهرست

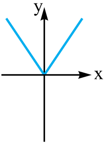
درس ۱

تبدیل نمودار تابع

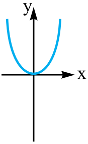
یادآوری نمودار چند تابع خاص: در زیر، نمودار چند تابع که در سال‌های گذشته با آن‌ها آشنا شده‌اید جهت یادآوری آورده شده‌اند. آگاهی از این نمودارها برای ادامهٔ بحث از الزامات اساسی است.



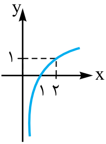
$y = \frac{1}{x}$



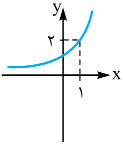
$y = |x|$



$y = x^2$



$y = \log_2 x$



$y = 2^x$

در سال‌های قبل دیدیم که اگر نمودار تابعی مانند $f(x)$ را داشته باشیم، چگونه می‌توان نمودار توابع خاصی که از $f(x)$ ساخته می‌شوند را مشخص نمود. در ادامه این موارد مطرح شده‌اند.

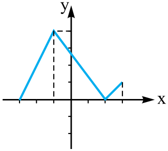
الف. انتقال عمودی و افقی توابع

۱ هرگاه نمودار $f(x)$ معلوم و k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار $f(x)+k$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به طرف بالا انتقال دهیم (واضح است که اگر k منفی باشد، باید k واحد به طرف پایین انتقال دهیم).

۲ هرگاه نمودار $f(x)$ معلوم و k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار $f(x+k)$ کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم (واضح است که اگر k منفی باشد، باید k واحد به سمت راست انتقال دهیم).

تست

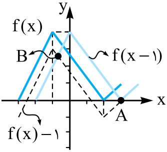
اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، آن‌گاه دو تابع $f(x)-۱$ و $f(x-۱)$ چند نقطهٔ مشترک دارند؟



۱) هیچ ۲) یک

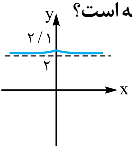
۳) دو ۴) بی‌شمار

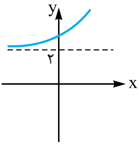
پاسخ گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار $f(x)-۱$ باید $f(x)$ را یک واحد پایین بیاوریم که با خط‌چین رسم شده است و برای رسم نمودار $f(x-۱)$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. ملاحظه می‌کنیم که دو تابع $f(x)-۱$ و $f(x-۱)$ فقط در دو نقطهٔ A و B اشتراک دارند.

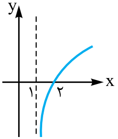


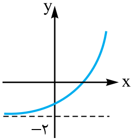
تست

نمودار تابع $f(x)=۲^x$ را می‌شناسید. نمودار تابع $۲+۲^{x-۱}$ به کدام گزینه شبیه است؟

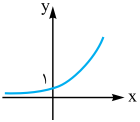
۱)


۲)


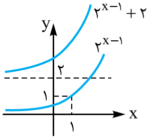
۳)


۴)


پاسخ | گزینهٔ ۲ نمودار ۲^x به شکل مقابل است.



برای رسم نمودار $۲^{x-۱}$ باید نمودار زیر را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم. حالا اگر نمودار را ۲ واحد بالا ببریم، نمودار $۲^{x-۱}+۲$ به دست می‌آید. مشاهده می‌کنید که نمودار حاصل، شبیه گزینهٔ (۲) است.



تعیین دامنه و برد توابع پس از انتقال عمودی و افقی:

اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ و k عددی مثبت باشد، آن‌گاه:

الف دامنهٔ تابع $y=f(x)+k$، برابر با $D_y=[a,b]$ و بـرد آن $R_y=[c+k,d+k]$ است. به بیان دیگر:

در انتقال عمودی، دامنهٔ تابع تغییر نمی‌کند ولی به هر عضو از برد آن، k واحد اضافه می‌شود.

ب دامنهٔ تابع $y=f(x+k)$، برابر $D_y=[a-k,b-k]$ و برد آن $R_y=[c,d]$ است. به بیان دیگر:

در انتقال افقی، از هر عضو دامنهٔ آن k واحد کم می‌شود ولی برد آن تغییر نمی‌کند.

تست

اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $[-۱,۳]$ و $[۰,۲]$ باشند، آن‌گاه دامنه و برد تابع $f(x+۱)-۲$ کدام‌اند؟

۱) $R=[۲,۴]\,,\,D=[۰,۴]$ ۲) $R=[-۲,۰]\,,\,D=[-۲,۲]$

۳) $R=[-۲,۰]\,,\,D=[۰,۴]$ ۴) $R=[۲,۴]\,,\,D=[-۲,۲]$

پاسخ | گزینهٔ ۲ تابع ۱ واحد به سمت چپ انتقال می‌یابد، پس دامنهٔ تابع جدید به صورت $[-1-1,3-1]$؛ یعنی $D=[-2,2]$ است.
ضمناً تابع ۲ واحد به طرف پایین انتقال می‌یابد، پس برد آن $[0+(-2),2+(-2)]$؛ یعنی $R=[-2,0]$ است.

ب. انبساط و انقباض در راستای عمودی

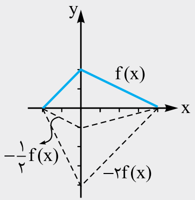
هرگاه نمودار تابع $f(x)$ معلوم باشد، برای رسم نمودار $kf(x)$ عرض‌های نقاط تابع $f(x)$ را (بدون تغییر طول آن‌ها) k برابر می‌کنیم.

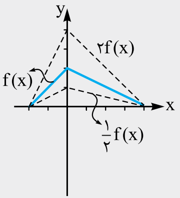
نکته

۱ واضح است که اگر $|k|>1$ باشد، شکل در راستای محور yها منبسط می‌شود و اگر $0<|k|<1$ باشد، شکل منقبض خواهد شد.

۲ اگر $k>0$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور xها تغییر نمی‌کند ولی اگر $k<0$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور xها تغییر می‌کند؛ بدین معنی که اگر $k<0$ باشد، قسمت‌هایی از $f(x)$ که زیر محور xها قرار دارند به بالای محور xها می‌آیند و قسمت‌هایی از $f(x)$ که بالای محور xها هستند، به پایین محور xها می‌آیند.

به شکل‌های زیر توجه کنید:

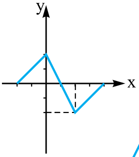


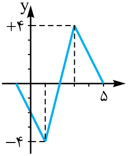


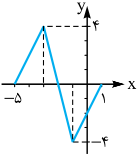
نتیجهٔ مهم | نمودار $-f(x)$ قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها است.

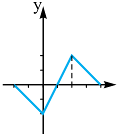
تست

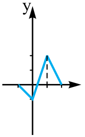
نمودار $f(x)$ به شکل مقابل است. نمودار تابع $-۲f(x-۱)$ کدام است؟



۱) 

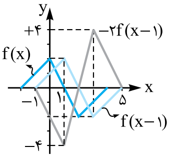
۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ | گزینهٔ ۱

ابتدا نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ ۱ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $f(x-۱)$ پدید آید و سپس عرض‌های آن را -۲ برابر می‌کنیم تا نمودار $-۲f(x-۱)$ به دست آید. ملاحظه می‌کنید که نمودار حاصل شبیه گزینهٔ (۱) است.



پ. انبساط و انقباض در راستای افقی

هرگاه نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $f(kx)$ باید طول هر نقطه از منحنی را (بدون تغییر عرض آن‌ها) $\frac{۱}{k}$ برابر کنیم. (واضح است که باید $k \neq ۰$ باشد!)

نکته

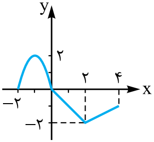
۱ اگر $|k|>1$ باشد، آن‌گاه نمودار $f(x)$ در راستای محور xها منقبض می‌شود و اگر $0<|k|<1$ باشد، آن‌گاه نمودار $f(x)$ در راستای محور xها منبسط می‌شود.

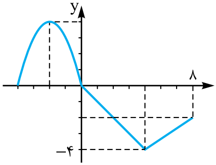
۲ اگر $k>0$ باشد، آن‌گاه موقعیت شکل نسبت به محور yها تغییر نمی‌کند ولی اگر $k<0$ باشد، موقعیت شکل نسبت به محور yها عوض می‌شود. یعنی اگر $k<0$ باشد، قسمتی از منحنی که سمت راست محور yها بوده به سمت چپ آن منتقل می‌شود و برعکس.

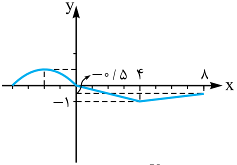
نتیجهٔ مهم | نمودار $f(-x)$، قرینهٔ نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها است.

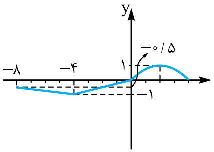
تست

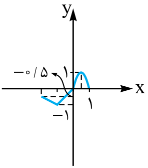
اگر شکل مقابل نمودار $f(x)$ باشد، نمودار $\frac{1}{2}f(-\frac{x}{2})$ کدام است؟



۱) 

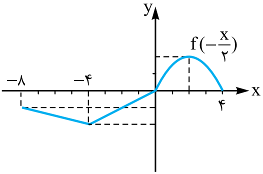
۲) 

۳) 

۴) 

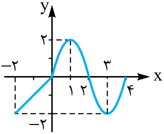
پاسخ | گزینهٔ ۳

$-\frac{x}{2}$ یعنی $-\frac{1}{2}x$. پس باید طول‌های تابع را $\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$ برابر کنیم، پس نقطه‌ای که طول آن در $f(x)$ برابر ۴ است در $f(-\frac{x}{2})$ برابر -8 است و ... (شکل مقابل پدید می‌آید). چون $f(-\frac{x}{2})$ در $\frac{1}{2}$ ضرب شده، پس عرض هر نقطهٔ $f(-\frac{x}{2})$ باید $\frac{1}{2}$ برابر، یعنی نصف شود، در نتیجه گزینهٔ (۳) درست است.



تست

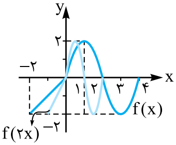
اگر نمودار $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار $-f(2x)$ با $f(x)$ چند نقطهٔ مشترک دارد؟



۱) ۱   ۲) ۲

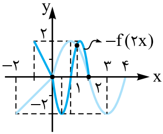
۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ | گزینهٔ ۳ برای رسم نمودار $f(2x)$ باید طول‌های نقاط را نصف کنیم (بدون تغییر عرض) تا شکل ۱ پدید آید و برای رسم $-f(2x)$ باید $f(2x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم که در شکل به صورت رنگی رسم شده است. مشاهده می‌شود $-f(2x)$ و $f(x)$ در سه نقطه مشترک هستند.



(شکل ۱)

$\Rightarrow$



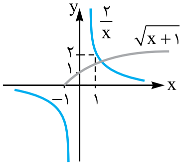
(شکل ۲)

تست

معادلهٔ $\sqrt{x+۱}=\frac{۲}{x}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ | گزینهٔ ۲



ریشه‌های این معادله، طول‌های نقاط برخورد دو تابع $y_۱=\frac{۲}{x}$ و $y_۲=\sqrt{x+۱}$ هستند. نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ را می‌شناسیم و برای رسم نمودار $۲f(x)=\frac{۲}{x}$ باید عرض‌های آن را دو برابر کنیم.

نمودار $\sqrt{x}$ را نیز می‌شناسیم و برای رسم نمودار $\sqrt{x+۱}$ باید نمودار $\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم.

با توجه به نمودار، این دو تابع فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشه دارد.

تعیین دامنه و برد توابع پس از انقباض و انبساط: اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به ترتیب $D_f=[a,b]$ و $R_f=[c,d]$ باشند، آن‌گاه:

الف دامنهٔ تابع $y=kf(x)$، برابر با $D_y=[a,b]$ است؛ یعنی در انبساط و انقباض عمودی، دامنهٔ تابع تغییر نمی‌کند.

برد تابع در حالتی که $k>۰$ باشد، برابر $R_y=[kc,kd]$ و در حالتی که $k<۰$ باشد، برابر $R_y=[kd,kc]$ است.

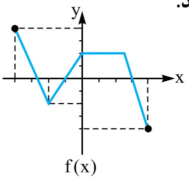
ب دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ در حالتی که $k>۰$ باشد، برابر با $D_y=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ و در حالتی که $k<۰$ باشد، برابر $D_y=[\frac{b}{k},\frac{a}{k}]$ است. برد آن تابع نیز $R_y=[c,d]$ است؛ یعنی در انبساط و انقباض افقی برد تابع تغییر نمی‌کند.

ت. ترکیب انتقال و انبساط، انقباض در راستای افقی

فرض کنیم نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و بخواهیم نمودار تابع $y=f(kx+t)$ را رسم کنیم، باید توجه داشته باشیم که ابتدا انتقال را انجام می‌دهیم و سپس انبساط یا انقباض را اجرا می‌کنیم؛ بدین معنی که ابتدا تابع $f(x)$ را t واحد در جهت منفی محور xها انتقال می‌دهیم تا $f(x+t)$ و سپس طول هر یک از نقاط را $\frac{1}{k}$ برابر می‌کنیم تا $f(kx+t)$ به دست می‌آید.

تست

شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ را نشان می‌دهد.



دامنه و برد تابع $y=f(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) $D=[-۲,۲]$ و $R=[-۳,۵]$

۲) $D=[-۲,۲]$ و $R=[-۴,۴]$

۳) $D=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$ و $R=[-۴,۴]$

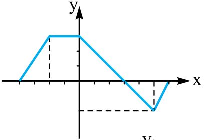
۴) $D=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$ و $R=[-۵,۳]$

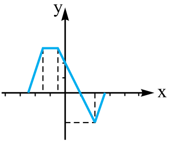
پاسخ | گزینهٔ ۳ با توجه به شکل معلوم می‌گردد که $D_f=[-۴,۴]$ و $R_f=[-۴,۴]$ است. چون می‌خواهیم دامنه و برد تابع $y=f(۲x+۱)$ را مشخص کنیم و عملیات روی تابع $f(x)$ فقط افقی است، پس برد آن تغییری نمی‌کند؛ یعنی $R_y=[-۴,۴]$ است.

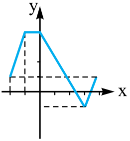
از طرفی برای رسم نمودار $f(۲x+۱)$ ابتدا باید تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم و سپس طول‌های آن را نصف کنیم. دامنهٔ تابع پس از یک واحد انتقال به سمت چپ $[-۵,۳]$ خواهد شد و اگر هر عضو آن را نصف کنیم، خواهیم داشت $D_y=[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}]$.

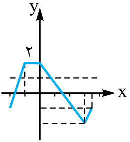
تست

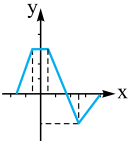
اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$ کدام است؟



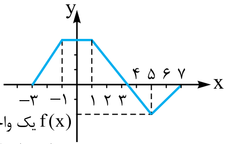
۱) 

۲) 

۳) 

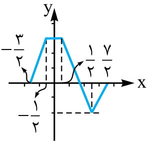
۴) 

پاسخ **گزینهٔ ۴** تابع $f(۲x-۱)$ فقط در راستای افقی انتقال و انقباض می‌یابد. ابتدا انتقال را انجام می‌دهیم؛ یعنی $+۱$ واحد در جهت مثبت محور xها جابه‌جا می‌شویم (شکل ۱) و سپس طول نقاط را نصف می‌کنیم (شکل ۲).



$f(x)$ یک واحد به سمت راست انتقال یافت.

شکل (۱)



شکل (۲)

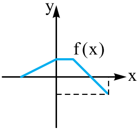
ملاحظه می‌شود که شکل نهایی مشابه گزینهٔ (۴) است.

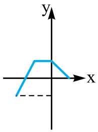
ث. ترکیب انتقال و انبساط، انقباض در راستای عمودی

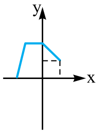
فرض کنیم نمودار تابع $f(x)$ داده شده باشد و بخواهیم نمودار $y=kf(x)+t$ را رسم کنیم. برای این منظور ابتدا انبساط یا انقباض را انجام می‌دهیم و سپس انتقال را اجرا می‌کنیم؛ یعنی ابتدا تابع $f(x)$ را k برابر می‌کنیم و سپس t واحد به طرف بالا انتقال می‌دهیم.

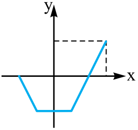
تست

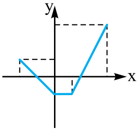
اگر نمودار $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار $y=-۲f(x)+۱$ به کدام صورت است؟



(۱


(۲


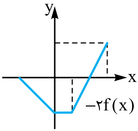
(۳


(۴


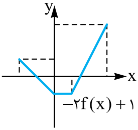
پاسخ گزینهٔ ۴

ابتدا باید عرض نقاط تابع $f(x)$ را -۲ برابر کنیم تا به شکل (۱) تبدیل شود:

سپس نمودار $-۲f(x)$ را به اندازهٔ یک واحد در جهت مثبتِ محور yها انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-۲f(x)+۱$ حاصل شود. (شکل ۲)



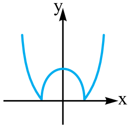
شکل (۱)

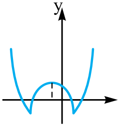


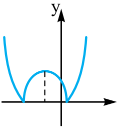
شکل (۲)

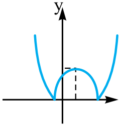
پرسش های تستی

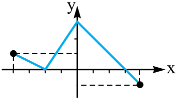
۱- نمودار تابع $y = |x^{۲} + ۲x - ۱|$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 



۲- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، آن‌گاه نمودار تابع $f(x-۱)-۲$ محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) سه ۲) یک ۳) هیچ ۴) دو

۳- کدام گزینه دربارهٔ معادلهٔ $x^{۲} + ۲x - \sin x - ۱ = ۰$ درست است؟

۱) دو ریشهٔ منفی دارد.

۲) دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت دارد.

۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد.

۴) بی‌شمار ریشه دارد.

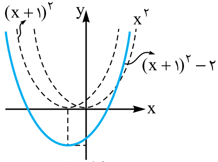
پاسخ پرسش‌های تستی

۱- گزینهٔ «۳» می‌دانیم: $x^{۲}+۲x-۱=x^{۲}+۲x+۱-۲=(x+۱)^{۲}-۲$

پس: $y=|(x+۱)^{۲}-۲|$

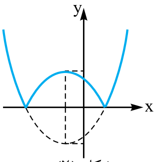
اگر $f(x)=x^{۲}$ باشد، برای رسم نمودار $f(x+۱)=(x+۱)^{۲}$ باید $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ ببریم. حالا اگر نمودار این تابع جدید را دو واحد پایین بیاوریم، نمودار $f(x+۱)-۲$ حاصل می‌شود. (شکل ۱)

برای رسم $|f(x+۱)-۲|$ کافی است قسمتی از نمودار $f(x+۱)-۲$ را که زیر محور xها است نسبت به محور xها قرینه کنیم (شکل ۲).



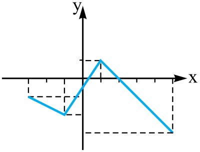
شکل (۱)

$\Rightarrow$



شکل (۲)

۲- گزینهٔ «۴» نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و دو واحد پایین می‌آوریم تا نمودار $f(x-۱)-۲$ به دست آید (شکل مقابل). مشاهده می‌شود که این تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.



۳- گزینهٔ «۳» معادله را به صورت $x^۲+۲x-۱=\sin x$ یا $(x+۱)^۲-۲=\sin x$ تبدیل می‌کنیم. ریشه‌های این معادله طول‌های نقاط برخورد دو تابع $y_۱=x^۲+۲x-۱=(x+۱)^۲-۲$ و $y_۲=\sin x$ هستند.

نمودار این دو تابع در شکل مقابل رسم شده‌اند و مشاهده می‌کنیم که دو نقطهٔ برخورد دارند که طول یکی مثبت و طول دیگری منفی است.